日本体育大学紀要 26 巻 2 号 (1997) 279-280

[資　料]

2 項分布の Poisson 分布による近似について

大　林　昇*

(平成 8 年 10 月 17 日受付，平成 8 年 12 月 3 日受理)

Approximation of Binomial Distribution by Poisson Distribution

Noboru OBAYASHI

This report is concerned with approximation between the binomial and the Poisson distributions. In the case that probability p is very small and trials n is very large, the binomial probability is approximated by the Poisson probability. But, these processes have been introduced by difficult ways in the past[1~5].

This paper shows a simple process concerning the approximation by elementary method. We also add the estimations between them.

1. 諸　言

2 項確率分布は 1 個の出現確率が小さく，試行回数が大きいとき，Poisson 確率分布で近似できることが知られている。この理論的近似（Poisson 分布への移行）の方法は，種々考えられているが，いずれも複雑な手法を用いている[1~5]。

私は統計学講義の予習で，この問題について簡易な方法を発見し，更に 2 項確率の Poisson 確率による近似評価式を与えたので，これを報告する。

2. 2 項分布と Poisson 分布について

(1) 2 項分布

1 回の出現確率を p とする。すなわち $p+q=1$。n 回試行して r 回出現する確率 $P(n:r)$ を 2 項確率といい，

$$P(n:r)={}_nC_r p^r q^{n-r} \tag{2.1}$$

で計算される。勿論

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r p^r q^{n-r}=1 \tag{2.2}$$

である。$r(r=0, 1, 2\cdots, n)$ に (2.1) の確率 $P(n:r)$ を対応させた表を 2 項分布表という。

(2) Poisson 分布

1 回の出現確率を p とするとき，n 回試行して r 回出現する Poisson 確率は

$$R(m:r)=\frac{m^r}{r!}e^{-m}. \text{ ただし } np=m \tag{2.3}$$

これを $r(r=0, 1, 2, 3,\cdots)$ に (2.3) の確率 $R(m:r)$ を対応させた表を Poisson 分布表という。

3. 2 項分布から Poisson 分布への移行

(2.2) の左辺は $(p+q)^n$ の 2 項展開であるから

$$(p+q)^n=1 \quad . \tag{3.1}$$

$np=m$ とおくと

$$p=\frac{m}{n} \quad . \tag{3.2}$$

これを (3.1) に代入して

$$\left(\frac{m}{n}+q\right)^n=1 \quad . \tag{3.3}$$

$p\to 0(n\to\infty)$ のとき $q\to 1$ であるから

$$\left(1+\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^n A_n=1 \tag{3.4}$$

とすることができる。ここで A_n は n に関する定数である。$n\to\infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{m}}\right)^{n/m}\right\}^m A_n=1$$

により

$$e^m A=1 \quad . \tag{3.5}$$

* 自然科学研究室

ただし $A=\lim_{n\to\infty} A_n=e^{-m}$.

(3.5) の e^m を Maclaurin 展開して

$$\left(1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots\right)e^{-m}=1 \quad .$$

故に，分配法則により

$$1\cdot e^{-m}+\frac{m}{1!}e^{-m}+\frac{m^2}{2!}e^{-m}+\frac{m^3}{3!}e^{-m}+\cdots =1 \quad (3.6)$$

を得る。上式で，各項が Poisson 確率 $R(m:r)$ となり，確率分布を得る。

4. 近似評価

(3.6) で，最初の数項を取り除いた級数 E_x $(0<x\leqq n, x$ は自然数)

$$E_x=\frac{m^{x+1}}{(x+1)!}e^{-m}+\frac{m^{x+2}}{(x+2)!}e^{-m}+\frac{m^{x+3}}{(x+3)!}e^{-m}+\cdots \quad (4.1)$$

を考える。(2.2) から (3.6) を減じて

$$\left|\sum_{r=0}^{x}\left({}_nC_r\,p^r q^{n-r}-\frac{m^r}{r!}e^{-m}\right)\right|\leqq E_x$$

なる不等式を得る。ここでほとんどの確率について不等式

$$\frac{m^r}{r!}e^{-m}\leqq {}_nC_r\,p^r q^{n-r} \quad (4.2)$$

が成立することを利用して，近似不等式

$$\left|{}_nC_x\,p^x q^{n-x}-\frac{m^x}{x!}e^{-m}\right|\sim E_x$$

(～はほとんど等しいという記号)，すなわち

$$|P(n:X=x)-R(m:X=x)|\sim E_x \quad (4.3)$$

が得られる。

(4.1) で m が十分小さいときは，第1項のみをとって

$$E_x^1=\frac{m^{x+1}}{(x+1)!}e^{-m} \quad (4.4)$$

として E_x を E_x^1 で置き換えても，近似評価式 (4.3) は成り立つ。

5. 結　言

2項 (確率) 分布から Poisson (確率) 分布に移行する本方法は，e の定義

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を用いる必要はあるが，初等的かつ簡明である。すなわち，この問題は個々の確率について取扱うと，近似の移行がむずかしくなるが，確率の全体を分布としてまとめて処理すると初等的に進められることが明らかになった。したがって本方法を初等統計学の講義に組入れることが可能となった。

参考文献

1) 河田竜夫：確率と統計，朝倉数学講座 17，朝倉書店，pp. 73–74.
2) 森田優三：統計数理入門，日本評論社，pp. 120–122.
3) 丸山儀四郎：確率および統計，共立出版，pp. 94–95.
4) 神崎可也，中川哲男：プラクティカル統計学，開成出版，pp. 53.
5) 村上正康，安田正実：統計学演習，培風館，pp. 51–52.