日本体育大学紀要 17 巻 1 号 (1987) 31-40

2 人ゼロ和ゲームとしての水球のペナルティースロー

原　　朗*・山内　賢**・当麻成人*
高木克美***・清原伸彦*

(昭和 62 年 5 月 6 日受付，昭和 62 年 6 月 26 日受理)

Penalty Throw in Waterpolo as A Two-Person Zero-Sum Game

Akira HARA, Ken YAMAUCHI, Naruhito TAIMA,
Katsumi TAKAGI, and Nobuhiko KIYOHARA

(Purpose)

The present study was to investigate the use of "Two-person Zero-sum Game" theory for penalty throw in waterpolo. The study was mainly focused on "Linear Progamming (LP)" which is a mathematical formula, applied to penalty throw. Those are: 1) the way of planning an optimal strategy between a shooter and a goal keeper. and 2) predicting the advantages and disadvantages in this game.

(Method)

Based on an opinioneire the various pure strategies were categorized into Player I (shooter), and Player II (goal keeper).

Followings are the pure strategies in each category;

For Player I

a_1; Shoot at one point in a goal by choosing this point, which is picked by the player.

a_2; Shoot at one point by looking at another point in a goal.

a_3; Shoot with "quick mothion".
(Ex.) He gets a low position above the water.

a_4; Shoot with "wide mothion".
(Ex.) He gets a high position above the water.

a_5; Shoot at one point opposite to the direction to which the body face.

For Player II

b_1; Defend the goal by predicting the shoot course.

b_2; Defend the goal by using the provocative action against the shooter.

b_3; Defend the goal by making a dash against the shooter at the same time when the refree blows a whistle.

b_4; Defend the goal by using the faint motion.

b_5; Defend the goal by reading the shoot motion and the shoot course.

The game of penalty throw is based on these strategies and this game is defined as a "Matrix Game". Generally, (m, n) matrix is calculated with "Simplex Formula". In this study, (m, n) matrix is replaced to (2, 2) matrix, which was calculated with "Graph Formula" in LP.

(Result)

For Player I, the following "mix strategies" were good to practice the penalty throw against any strategies b_j $(j=1, 2, 3, 4, 5)$. The mix strategies were $\langle a_1\text{-}a_4\rangle$, $\langle a_2\text{-}a_4\rangle$, and $\langle a_3\text{-}a_4\rangle$.

For Player II, $\langle b_2\text{-}b_3\rangle$, $\langle b_3\text{-}b_4\rangle$ were good mix strategies against any strategies a_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$.

* 水泳研究室，** 体育方法学研究室，*** 京都文京短大

1. はじめに

一般に競技スポーツにおいて，利害が対立する２個以上の行動主体が存在し，おのおのの行動主体が競争的立場にある時，彼らはそれぞれのとるべき行動の意志決定を，何らかの判断基準をもって，自己に有利になるように解決しようとする。ここに偶然的要因が関与した場合に，彼らにとって思いがけない損失を招くこともある。

従来，上記のような問題を解決するために指導者達（監督・コーチ・etc）は，自らが経験あるいは体験してきたところによる「かん」とか「こつ」というものに頼ってきたわけである。しかし，今日急速に複雑・多様化するゲーム展開において，上記のような手段だけではもはやその世界をリードすることは困難になってきた。そこに意志決定のための合理的判断基準が必要となり，多くの具体的スポーツ場面での，いわゆる予測理論としての「ゲームの理論」の導入がさかんに行なわれるようになった。

すなわち，ゲームにおける最適戦略（そのゲームにおいて最も有効であると思われる戦略）の予測や得失点の予測を，実際の数値を用いて定量的に行なおうとする試みである。

本稿では，水球におけるペナルティースローをモデルとして，そのペナルティースローをゲームの理論の「２人ゼロ和（有限）ゲーム」(Appendix 1 参照）として位置づけ，数学的には基本的な「線形計画法」を用いて，数理科学的見地からの具体的検討を試みた。

2. 純戦略の決定

ペナルティースローは，シュートを打つ者とゴールキーパーの間の２人ゼロ和（有限）ゲームである。両者は互いに，いくつかの純戦略（Appendix 1 参照）を持ち，前者はプラスプレイヤーであり，後者はマイナスプレイヤーである[注1)]。

以下，鞍部点定理・Min-Max 定理（Appendix 1 参照）をふまえて，ペナルティースローによっ

表１　プレイヤーの純戦略

シュートを打つ者（プレイヤーⅠ）についての純戦略
a_1：シュートの方向、高低をあらかじめ決めて打つ。 a_2：シュートを打つ逆の方向を視て打つ。 a_3：シュートモーションを素早くして打つ。 例えば、体を水面からあまり出さずに低い位置でシュートを打つ。 a_4：シュートモーションを大きくして打つ。 例えば、体を水面から高く出してシュートを打つ。 a_5：体の向きとシュートコースを逆にしてシュートを打つ。
ゴールキーパー（プレイヤーⅡ）についての純戦略
b_1：シュートコースを予想して守る。 b_2：ゴールの真ん中に位置して守らず、シュートコースを空けて守る。 b_3：前に飛び出して守る。 b_4：フェイントを掛け、相手がシュートを打つ瞬間その逆に飛んで守る。 b_5：シュートフォーム・ボールを良く視てそのシュートに反応して守る。

て得られた実測値を基に，ゲームの理論の線形計画法に側して解き，その数値について具体的に検討する。

シュートを打つ者（プレイヤー I）とゴールキーパー（プレイヤー II）のとる純戦略群を客観的にとらえるために，日本体育大学々友会水泳部水球ブロック男子部員にペナルティースローの戦略に関するアンケートを実施し，それぞれのプレイヤーのとる純戦略を決定した（表1参照)。

3. 測定方法

日本体育大学々友会水泳部水球ブロック男子選手（ナショナルプレイヤー）を被験者として，ペナルティースロー合戦を行なわせた。

確率的なかたよりをできるだけ避けるため，

$$a_1-b_1,\ a_1-b_2,\ a_1-b_3,\ a_1-b_4,\ a_1-b_5,$$
$$a_2-b_1,\ a_2-b_2,\ a_2-b_3,\ a_2-b_4,\ a_2-b_5,$$
$$a_3-b_1,\ a_3-b_2,\ a_3-b_3,\ a_3-b_4,\ a_3-b_5,$$
$$a_4-b_1,\ a_4-b_2,\ a_4-b_3,\ a_4-b_4,\ a_4-b_5,$$
$$a_5-b_1,\ a_5-b_2,\ a_5-b_3,\ a_5-b_4,\ a_5-b_5,$$

表2 得 点 表

ゲームの順番 No

○：ゴールイン
×：キーパーによる得点阻止
△：シュートがゴール外にはずれた時

No	純戦略の組合せ	結果	純戦略の組	NO	純戦略の組合せ	結果
1	a_2 b_1	×	a_3 b	242	a_1 b_2	×
2	a_5 b_3	○	a_4 b	243	a_5 b_5	△
3	a_5 b_4	○	a_4 b	244	a_3 b_1	○
4	a_2 b_4	○	a_5 b	245	a_5 b_1	○
5	a_2 b_2	×	a_5 b	246	a_1 b_3	○
6	a_5 b_4	△	a_4 b	247	a_5 b_2	○
7	a_2 b_4	△	a_2 b	248	a_5 b_5	○
8	a_3 b_4	○	a_5 b	249	a_3 b_1	○
9	a_5 b_1	×	a_2 b	250	a_5 b_4	○

表 3　プレイヤーＩに対する利得表

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	8	1	7	0	7
a2	4	4	2	9	7
a3	7	7	3	8	7
a4	10	8	4	5	7
a5	2	4	−2	3	7

の各組合わせを書いたカードを 10 枚ずつ，計 250 枚のカードを箱の中に入れ，それらを任意抽出した。さらに，その出てきたカードの順番にゲームを行なわせることを前提として，表 2 に見られるような得点表を作成した。

両者は，2 人ゼロ和ゲームの原則 (Appendix 1 参照) を基に，表 2 の左のらんの純戦略の組合わせの順番に従ってゲームを行った。

すなわち，2 人はお互いに，相手の選択する戦略が何であるのかを知らされないことを原則として，250 本のペナルティースロー合戦を行なうのである。

利得表は，プレイヤーＩに対する利得を記録することにし，得点するごとに利得を +1 点，ゴールキーパーによる得点阻止を −1 点，ゴール外へのシュートを 0 点とした。

すなわち，○=+1 点，×=−1 点，および △=0 点である。

結果は，表 3 に示す。

一般に，(m, n) 行列は，シンプレックス解法を用いて解く。

本研究の場合は，(2, 2) 行列を行列モデルとしてとらえ，線形計画法のグラフ解法によってゲームの解を求める。

4. 結　果

はじめに，鞍部点を求めた。しかし，このゲームにおいて鞍部点は発見できなかった。

つぎに，このゲームにおける優越性[注2]を求めた。優越性を調べた上でのプレイヤーＩの利得表を表 4 に示す。

さらに，表 4 の利得表によって得られた利得行列を (2, 2) 行列に還元した。

その時の鞍部点を探索し，最適戦略を求める。もし，鞍部点が存在しない場合は，混合戦略を考える。

表 4　優越性をふまえた上でのプレイヤーＩの利得表

	b2	b3	b4
a1	1	7	0
a2	4	2	9
a3	7	3	8
a4	8	4	5

優越性

a2≧a5
a4≧a5

b1≧b3
b3≦b5

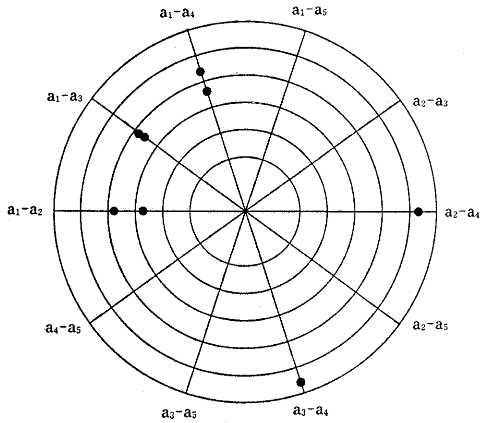

図 1-1　混合戦略によるＴスコア(プレイヤーＩ)

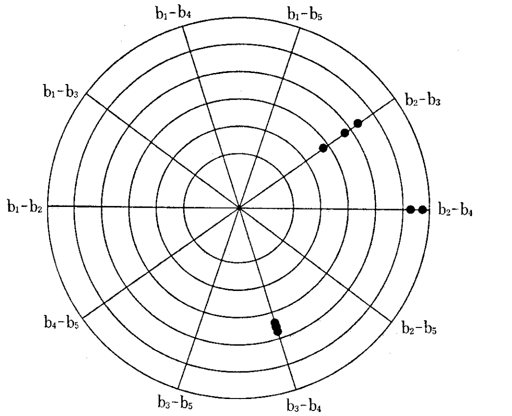

図 1-2 混合戦略によるTスコア（プレイヤーII）

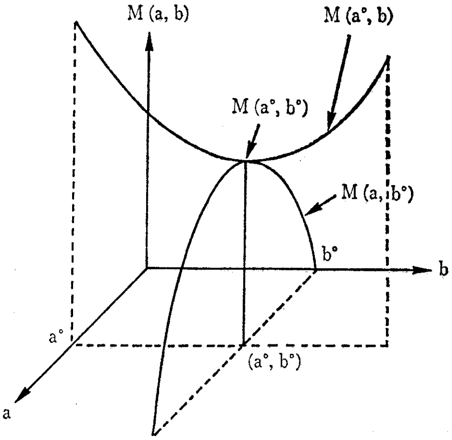

図 2 鞍部点

混合戦略は，Min-Max 定理をふまえた上での Appendix 2 に見られる (2, 2) 行列の解き方によって求められる。

求められたゲームの解のうち，混合戦略に注目し，その時のゲームの値とTスコアを表5に示した。同時に，各プレイヤーの比較的有効な混合戦略を発見しやすくするために，Tスコアを円グラフに示した（図 1-1，図 1-2 参照）。混合戦略は，プレイヤーが選択する戦略が複数のため，相手のプレイヤーを混乱させることができる。実際の試合場面では，純粋戦略よりも混合戦略を選択する。

表 5 混合戦略とゲームの値（Tスコア）

標本No	純戦略の組合せ	利得行列 $\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$	混合戦略		ゲームの値	Tスコア
1	$a_1 a_2$ / $b_2 b_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$	1/4 / 5/8	1/3 / 3/8	3.3	39.3
2	$a_1 a_2$ / $b_3 b_4$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$	1/2 / 9/14	1/2 / 5/14	4.5	47.9
3	$a_1 a_3$ / $b_2 b_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$	2/5 / 2/5	3/5 / 3/5	4.6	48.6
4	$a_1 a_3$ / $b_3 b_4$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$	5/12 / 2/3	7/12 / 1/3	4.7	49.3
5	$a_1 a_4$ / $b_2 b_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$	2/5 / 3/10	3/5 / 7/10	5.2	52.9
6	$a_1 a_4$ / $b_3 b_4$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	1/8 / 5/8	7/8 / 3/8	4.4	47.1
7	$a_2 a_4$ / $b_2 b_4$	$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	3/8 / 1/2	5/8 / 1/2	6.5	62.1
8	$a_3 a_4$ / $b_2 b_4$	$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	3/4 / 3/4	1/4 / 1/4	7.3	67.9

表5，図 1-1，図 1-2 より，プレイヤーIとプレイヤーIIの比較的有効な最適混合戦略が考察できる。

①プレイヤー I について

Tスコアの点数が 50 点以上の混合戦略は，$\{a_1, a_4\}$ ($\{b_2, b_3\}$) $\{a_2, a_4\}$ ($\{b_2, b_4\}$), $\{a_3, a_4\}$ ($\{b_2, b_4\}$)注3) であり，それぞれのゲームの値は，5.2 (52.9)，6.5 (62.1)，7.3 (67.9)注4) である。

②プレイヤー II について

Tスコアの点数が 50 点以下で，表5におけるプレイヤーIの混合戦略 $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$ に対する比較的Tスコアの点数が低いプレイヤーIIの混合戦略は，それぞれ $\{b_2, b_3\}$, $\{b_2, b_3\}$, $\{b_3, b_4\}$ である。その時のゲームの値は順に，3.3 (39.3)，4.6 (48.6)，4.4 (47.1)注4) である。

ここで，最適戦略を選択するということは，最悪の事態を考慮した上での最良の戦略を選択するこ

とである。故に，最適戦略を求めることは，これからゲームを行なう行動主体の意志決定のための重要な合理的判断基準となる。

以下の5において，以上をまとめる。

5. まとめ

水球におけるペナルティースローは，①シュートを打つ者にとって，純戦略 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 のそれぞれの各組合わせのうち，確率ベクトルをふまえた上での $\{a_1, a_4\}$, $\{a_2, a_4\}$, $\{a_3, a_4\}$ の3つの混合戦略を選択し，実践することがいかなる場合でも有効である②ゴールキーパーにとって，純戦略 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 のそれぞれの各組合わせのうち，確率ベクトルをふまえた上での $\{b_2, b_3\}$, $\{b_3, b_4\}$ の2つの混合戦略を選択し，実践することが，いかなる場合でも有効であると結論づけることができる。

Appendix 1

ゲームの理論の概略[1)]

利害の対立する2個以上の行動主体が競争的立場にある時，それぞれのとるべき行動と得失点の予測を数理科学的に決定するための理論をゲームの理論という。

ゲームの理論の中で最も基本的なモデルがある。2人ゼロ和（有限）ゲームという型である。

2人ゼロ和（有限）ゲームを成立させる要素を以下に述べる。

(1) 2人の競争者が存在する（以下プレイヤー I，プレイヤー II で表わす)。

(2) 2人はお互いにある許された範囲内でそれぞれいくつかの戦略を持ち，それを選択する（おのおののプレイヤーの持つ戦略を一つの集合と考えた時，その集合が有限集合の時「有限ゲーム」，一方または他方が無限集合の時「無限ゲーム」という)。戦略の選択は，相手のプレイヤーに知られることなく，独立に選ばれる。戦略とは，自分が有利であろうと独自に判断する行動決定のための作戦である。

(3) 2人は独自に，それぞれの意志に基づいた戦略の決定をとる。この時，プレイが行なわれたという。

(4) プレイが行われた時，結果が生じる。その結果，ある特定のルールの中で，ある一定の得点が支払われる。これを利得という。

ゲームの理論の基本的な考え方は，相手の戦略と自分の戦略によって決まる自分の利益の最小値(Min)を最大(Max)ならしめる戦略（最適戦略）を事前に見つけ，これを行動決定のための何らかの合理的判断基準とすることである。

ゲームの理論の基礎となるものに，鞍部点定理および Min-Max 定理がある。

これらの2つの定理を用いてゲームを解いていくのである。以下，2つの定理を簡単に説明する。

(a) 鞍部点定理について

a_i $(1 \leqq i \leqq m)$, b_j $(1 \leqq j \leqq n)$ を純戦略として，

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\} \ (m \text{ は自然数})$$
$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \ (n \text{ は自然数})$$

(A=プレイヤー I に許された純戦略の集合，B=プレイヤー II に許された純戦略の集合)

プレイヤー I が純戦略 a_i を用い，プレイヤー II が純戦略 b_j を用いた時のプレイヤー I の利得を e_{ij} $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ とする時，これらのゲームは，ひとつの利得行列 E を形成する。

$$E=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \cdots\cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} \cdots\cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} \cdots\cdots & e_{mn} \end{pmatrix}$$

$$e_{ij}(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)=E(\mathrm{a}_i,\ \mathrm{b}_j)$$

この時，2変数関数 $M(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$[注5] が領域 $A \times B$[注6] で与えられているとして，
点 $(\mathrm{a}°,\ \mathrm{b}°) \in A \times B$ が存在し，

$$M(^{\forall}\mathrm{a}^{注7)},\ \mathrm{b}°) \leqq M(\mathrm{a}°,\ \mathrm{b}°) \quad (1)$$

$$M(\mathrm{a}°,\ ^{\forall}\mathrm{b}) \geqq M(\mathrm{a}°,\ \mathrm{b}°) \quad (2)$$

とする。

(1) および (2) が成り立つ時，点 $(\mathrm{a}°, \mathrm{b}°)$ を関数 $M(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ のひとつの鞍部点といい，$M(\mathrm{a}°, \mathrm{b}°)=v$ を「鞍部値」または「ゲームの値」という。

すなわち，$\mathrm{b}=\mathrm{b}°$ とすると $\mathrm{a}=\mathrm{a}°$ が $M(\mathrm{a}, \mathrm{b}°)$ の最大値 (Max) となり，$\mathrm{a}=\mathrm{a}°$ とすると $\mathrm{b}=\mathrm{b}°$ が $M(\mathrm{a}°, \mathrm{b})$ の最小値 (Min) になるということである (図2参照)。

具体的には，各行の最小値中の最大値と各列の最大値中の最小値が一致する時，その値がなすプレイヤー I とプレイヤー II の純粋戦略をそれぞれの鞍部点 (最適純粋戦略) といい，その値を鞍部値またはゲームの値という。

鞍部点を実践することは，お互いにとって損のないゲームを行なうことができる。

(b) Min-Max 定理について

一般に戦略とは，鞍部点を伴なう純粋戦略のことであるが，鞍部点が存在しない場合も考えられるので，この場合には，Min-Max 定理をふまえた上での混合戦略を考えねばならない。

Min-Max 定理の説明を，以下の例題によって示す。

(例題)

2人のプレイヤーが存在し，$\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, $\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ をおのおのの純戦略とした以下のような利得表を得るゲームを考える。

プレイヤー I の利得表

	b_1	b_2	b_3
a_1	1	−1	0
a_2	−6	3	−2
a_3	8	−5	2

プレイヤー I についての純戦略

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$$

プレイヤー II についての純戦略

$$B=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$$

を考える。

この時，以下の利得行列が形成される。

$$E=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & -2 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \equiv \max_i \min_j e_{ij} = -1$$

(各行の最小値中の最大値)

$$v_2 \equiv \min_j \max_i e_{ij} = 2$$

(各列の最大値中の最小値)

故に，鞍部点は存在しない。

そこで，混合戦略を考える。$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ および $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle$ をそれぞれ，$\{a_1, a_2, a_3\}$ および $\{b_1, b_2, b_3\}$ の確率ベクトルとする時，

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \to x_3 = 1 - x_1 - x_2 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_j = 1 \to y_3 = 1 - y_1 - y_2 \quad (4)$$

$$0 \leqq x_i \leqq 1, \ i=1, 2, 3 \quad (5)$$

$$0 \leqq y_j \leqq 1, \ j=1, 2, 3 \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - 6x_2 + 8x_3 \geqq v \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geqq v \\ -2x_2 + 2x_3 \geqq v \end{array}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{array}{r} y_1 - y_2 \qquad \leqq v \\ -6y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leqq v \\ 8y_1 - 5y_2 + 2y_3 \leqq v \end{array}\right\} \quad (8)$$

であるから，(3)・(4)・(5)・(6) 式および (7)・(8) の連立系を解いて，$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, v$ の値を求める。

この場合には，以下の値が両者における最適混合戦略である。

$$\bar{x} = \langle 5/6, 1/6, 0 \rangle, \ \bar{y} = \langle 0, 1/3, 2/3 \rangle, \ v = -1/3$$

Appendix 2

(2, 2) 行列の解き方[2),3)]

(2, 2) 行列は，以下のような方法で解く。

プレイヤー I についての純戦略を a_1, a_2, プレイヤー II についての純戦略を b_1, b_2 とする。今，プレイヤー I の利得表を，

	b_1	b_2
a_1	e_{11}	e_{12}
a_2	e_{21}	e_{22}

とする。

(2, 2) 行列 E を考える。

$$E=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$$

その時の鞍部点 (Appendix 1 参照) を探索し，最適戦略を求める。もし鞍部点が存在しない場合は，混合戦略を考える。

混合戦略は，Min-Max 定理 (Appendix 1 参照) をふまえた上での以下の式を解くことによって求められる。

〈プレイヤー I について〉

$$v \leqq e_{1j}x_1+e_{2j}x_2=e_{1j}+e_{2j}(1-x_1)$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i=1,\ 0 \leqq x_i \leqq 1$$

であるから，

$$(e_{1j}-e_{2j})x_1+e_{2j} \geqq v \quad (j=1,\ 2) \tag{9}$$

となる。

以下の連立系 (10) を解いて，x_1，x_2，v の値を求める。

$$\left.\begin{aligned} (e_{11}-e_{21})x_1+e_{21} \geqq v \\ (e_{12}-e_{22})x_1+e_{22} \geqq v \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

〈プレイヤー II について〉

同様にして，

$$v \geqq e_{i1}y_1+e_{i2}y_2=e_{i1}y_1+e_{i2}(1-y_1)$$

$$\sum_{j=1}^{2} y_j=1,\ 0 \leqq y_j \leqq 1$$

であるから，

$$(e_{i1}-e_{i2})y_1+e_{i2} \leqq v \quad (i=1,\ 2) \tag{11}$$

となる。

以下の連立系 (12) を解いて，y_1, y_2, v の値を求める。

$$\left.\begin{aligned} (e_{11}-e_{12})y_1+e_{12} \leqq v \\ (e_{21}-e_{22})y_1+e_{22} \leqq v \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

謝　　辞

本研究を行なうにあたり，多大な御支援をたまわった，荒川清美教授ならびに北田韶彦博士に深甚なる謝意を表します。

文　献

1) 坂口　実:「ゲームの理論」. 森北出版，p. 1-14, 1989.
2) 山内　賢:「2 人ゼロ和ゲームとしてのハンドボールのペナルティースロー」. 体育の科学，第 36 巻，第 9 号，p. 708-711, 1986.
3) 入江昭二:「線形数学 I」. 共立出版，1983.

注

注 1) シュートを打つ者は得点をとる側であり，ゴールキーパーは，得点を阻止する側であるため。
注 2) 支払い行列の2つの行 (a_{pj}), (a_{qj}) $\{j=1, 2, \cdots n; p, q$ は任意の行$\}$ において，$a_{pj} \geqq a_{qj}$ ならば，p 行は q 行に優越するという。同じく，2 つの列 (a_{ir}), (a_{is}) $\{i=1, 2, \cdots m; r, s$ は任意の列$\}$ において，$a_{ir} \geqq a_{is}$ ならば，s 列は r 列に優越するという。この場合，q 行 r 列を除いた支払い行列のゲームを解けばよい。
注 3) ( ) 内は，対する相手の混合戦略。
注 4) ( ) 内は，Tスコア。
注 5) M は，Money の頭文字で，プレイヤー I の利得を表わす。M $(a_1, b_2)=3$ ということは，純戦略 a_1 と純戦略 b_2 をとった時のプレイヤー I の利得は3ということである。
注 6) A×B は集合 A と集合 B の直積を表わす。すなわち，$A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$ である。
注 7) 記号 $\forall$ は，「任意の」を表わす。