『日本体育大学大学院教育学研究科紀要』
第１巻第１・２合併号　2018（pp.51-65）

【特集論文】

算数科学習指導論
―問題解決能力の育成と問題発見能力の育成に焦点を当てて―

島田　功（日本体育大学）

本稿では，算数科教育に於ける学習指導論について考察する。そのために，本研究科の設立の趣旨の確認，学習指導の意味の吟味及び新学習指導要領（文部科学省，2017a）を含めたこれからの社会で必要とされる力は何かを分析し，それらを受けて算数科教育ではどのような学習指導を構成していけばよいかを検討する。

考察の結果，子ども達に育成しなければならない能力として，教科の本質に関わる見方・考え方の育成とともに問題解決能力と問題発見能力を導出した。このことを受け，算数科教育で問題解決能力と問題発見能力を育成するためには，どのような学習指導を構成すればよいかを先行研究（日本数学教育学会，2010）を調べ，その中から問題解決能力の育成に関わる「問題解決による学習指導」，「オープンエンドアプローチによる学習指導」，「数学的モデル化による学習指導」を，更に問題発見能力の育成に関わる「問題設定（Problem Posing）のための学習指導」を取り上げて考察した。問題解決能力や問題発見能力はすべての教科で育成しなければならない汎用的な能力であり，そのことを通して教科の固有性としての教科独自の見方・考え方を育成することが可能であり，このことは，本研究科の設立の趣旨にも合致すると言える。

キーワード：問題解決能力，問題発見能力，問題解決による学習指導，オープンエンドアプローチによる学習指導，数学的モデルによる学習指導，問題設定のための学習指導

Research on Teaching Instruction Theory in Mathematics Education
— Focusing on Cultivating Problem Solving Ability and Problem Finding Ability —

Isao SHIMADA (Nippon Sport Science University)

The purpose of this paper is to consider learning guidance theory in mathematics education. To this end, I review concepts and documents to confirm the purpose of establishment of this Graduate School Education, analyze the literature on learning guidance, consider what strengths are needed in the new course of study (Ministry of Education, 2017a) and the future society, and consider what kind of learning guidance should be constructed in mathematics education. As a result, I confirm that, in this graduate school education, practical researchers and subject matter education researchers are able to formulate learning guidance from the perspective of the foundation of the existence of subjects and the commonality and uniqueness of subjects, with emphasis on the viewpoint of subject education. "Learning guidance" is a teacher's approach involving respecting the student's subjectivity, then respecting that students acquire the knowledge, skills and ways of thinking of a subject, and to foster students' humanity (Yoshimoto, 1985). The new course of study (Ministry of Education, 2017a) attempts to nurture three qualities and abilities such as the knowledge, skills , ways of thinking of a subject and humanity, to nurture viewpoints and ideas related to the essence of a subject, and to develop problem solving abilities and heuristic problem abilities. In order to foster problem solving abilities and heuristic problem abilities in mathematics education and respond to the diversity of values, I have examined what kind of learning guidance should be constructed in mathematics education based on Japanese Society of Mathematical Education (2010). From this point, I will focus on learning guidance through problem solving, learning guidance by an open-ended approach, learning guidance by mathematical modeling, related to nurturing problem solving abilities, and learning guidance by problem setting (Problem Posing), related to nurturing heuristic problem abilities. Problem solving abilities and heuristic problem abilities are versatile abilities that must be trained in all subjects, and it is possible to train unique viewpoints and thinking through this subject (mathematics). It can be said that this also matches the purpose of establishment of this Graduate School Education.

Key words: problem solving ability, problem finding ability, learning guidance through problem solving, learning guidance by an open-ended approach, learning guidance by mathematical modeling, learning guidance by problem setting (problem posing)

1. 学習指導研究の背景

本研究科は教科教育学の視点を取り入れ「教科の存立基盤や教科の共通性と固有性という視点から学習指導を構想できる人材（カリキュラムプラクティスト）」（日本体育大学大学院教育学研究科，2017，p.3）を育成しようとしている。新学習指導要領 （文部科学省，2017a）との関連で言えば，見方・考え方が教科の固有性であり，資質・能力の３つの柱に当たるものが教科の共通性であり，更には，問題解決能力や問題発見能力も教科の共通性であると考える。

次に，学習指導とは子どもに能動的学習を通しながら教科に関する知識・技能・考え方を習得させ，更には子どもの人間性の発達をさせていく教師の働きかけである（吉本，1985）。また，学習指導には，学習目的論（何を重視するのか），学習過程論，学習形態論等多様な要素を内包している（日本教科教育学会，2017；高田，1995）。更に，学習指導という用語が第二次世界大戦後，新教育の普及とともに，戦前の「教授」の対抗語として広く使用されるようになり，教え込みからの脱却として学習指導という言葉が登場したのである（吉本，1985）。これに関連することは，戦後の学習指導要領一般編（昭和 22 年試案）第 4 章「学習指導法の一般」の「学習指導は何を目指すのか」の中で詳しく述べられている。

新しい学習指導要領では，コンテンツ・ベイスからコンピテンシー・ベイスに重心がシフトされ（奈須，2017），主体的・対話的で深い学びの過程を通して，資質・能力の 3 つの柱である①生きて働く知識技能の習得，②未知の状況にも対応できる思考力・判断力・表現力等，③学びを人生や社会に生かそうとする学びに向かう力・人間性等の涵養を目指している。これらの資質・能力の育成のためにどのような学習指導を行っていけばよいのかに関わって学習指導要領総則編(1) 学習の基盤となる資質・能力（第 1 章第 2 の 2 の(1)）に「ウ 問題発見・解決能力」がある。これを受けて，算数科解説（文部科学省，2017b，p.72）では，「学習指導の過程においては，数学的に問題発見・解決する過程を重視するものとした。」とあるように，問題解決能力と問題発見能力の育成が望まれている。問題解決能力や問題発見能力はすべての教科で育成しなければならない汎用的な能力であ

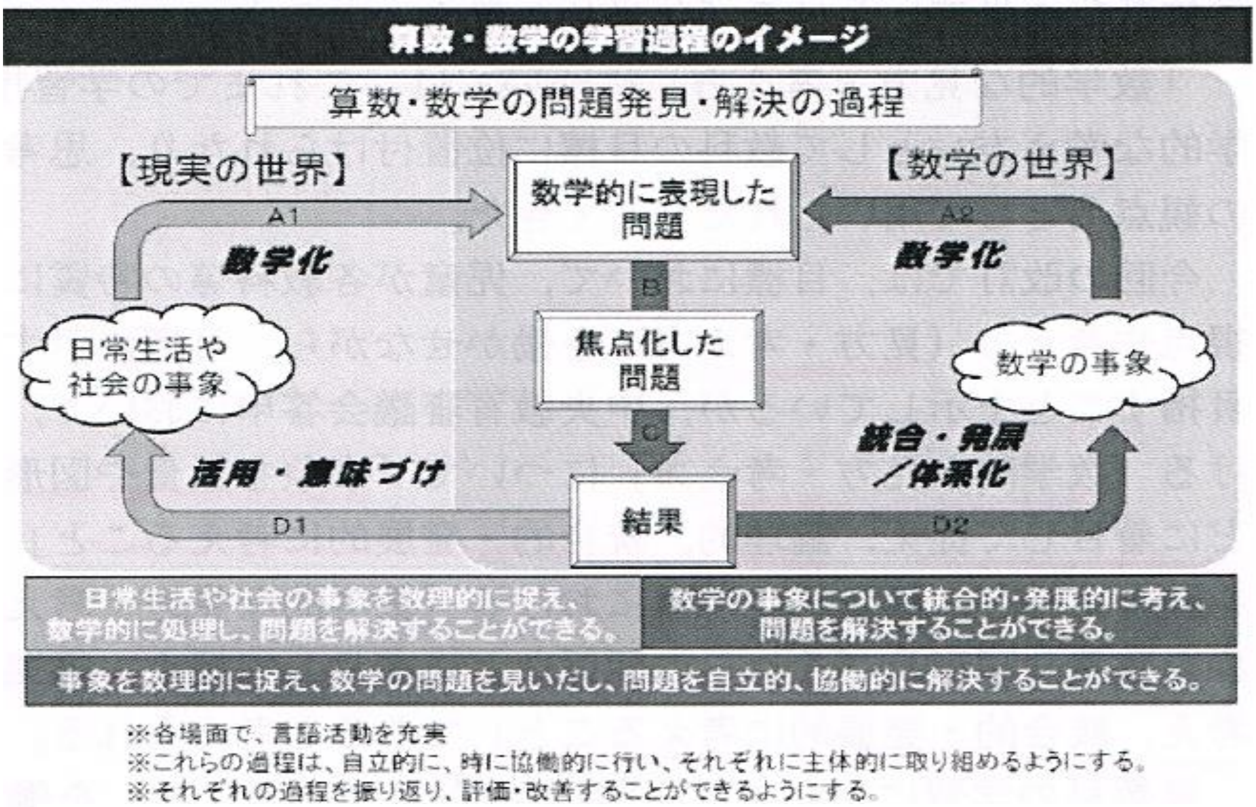


図 1　算数・数学の学習過程のイメージ（文部科学省，2017b, p.8）

り，そのことを通して教科の固有性としての教科独自の見方･考え方を育成することが可能であり，本研究科の設立の精神にも合致する。

更には，文部科学省コミュニケーション教育推進会議（2011）は，「グローバル化」が進む社会で大切なこととして，多様な価値観の受容と協働を挙げている。こうした価値観の多様性への対応についても配慮しなければならないと思われる。

以上の学習指導研究の背景を受け，次に算数科教育に於ける学習指導論について考察する。

2. 算数科教育に於ける学習指導

本章では，算数科に於ける学習指導論の先行研究（日本数学教育学会，2010）を調べ，問題解決能力と問題発見能力の育成に関わる学習指導論を抽出する。まず問題解決能力の育成に関わる学習指導として「問題解決による学習指導」，「オープンエンドアプローチによる学習指導」，「数学的モデル化による学習指導」を，更に問題発見能力の育成に関わる学習指導として「問題設定（Problem Posing）のための学習指導」を取り上げて考察を進めることにする。その際，それぞれの学習指導の実践校や研究冊子も合わせて紹介したい。

なお，算数科解説（文部科学省，2017b）は，算数･数学の学習過程のイメージ図（前頁図１参照）を発表した。このイメージ図の左回りの学習過程は「日常生活や社会の事象を数理的に捉え，数学的に表現・処理し，問題を解決し，解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する，という問題解決の過程」（文部科学省，2017b，p.8）であり，右回りの学習過程は「数学の事象について統合的・発展的に捉えて新たな問題を設定し，数学的に処理し，問題を解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする，という問題解決の過程」（p.8）である。この右回り左回りの二つの学習過程が相互に関わり合って展開する（文部科学省，2017b）。上記の４つの学習指導との関連を考察すると，「問題解決による学習指導」は左右両周りの学習過程に対応し，「オープンエンドアプローチによる学習指導」は，その中の「数学的オープンエンドアプローチ」が右回りの学習過程に対応し，「社会的オープンエンドアプローチ」が左回りの学習過程に対応し，「数学的モデル化による学習指導」は，左回りの学習過程に対応し，「問題設定（Problem Posing）のための学習指導」は右回りの学習過程に対応する。算数・数学の学習過程のこのイメージ図は数学的活動のためのイメージ図と言ってもよい。

2.1 問題解決による学習指導

「問題解決指導は，今日，世界各国の数学教育において，もっとも力が入れられているものの一つである」（中原，1995，p.83）。また，イギリスの数学の国家カリキュラム（National Curriculum）においても，アメリカの NCTM（米国数学教師協議会）による数学のカリキュラム“スタンダード”においても，問題解決能力の育成が重要な目標として位置付けられている（中原，1995）。

一方，日本においても今日まで多様な視点から問題解決の研究が取り組まれてきた。その中にポリアによる問題解決研究がある。ポリアはアメリカの問題解決研究の第 3 期（1954-1983）に位置づけられていて（中原，1995），日本の問題解決研究にも大きな影響を与えている（山下，2010）。

このポリアによる問題解決は，ポリア（1954）の著書である『いかにして問題を解くか』に書いてあるもので，問題解決過程の 4 段階（①問題を理解すること（Understanding the Problem），②計画を立てること（Devising a plan），③計画を実行すること（Carrying out the plan），④振り返ってみること（Looking back）が示されている。山田（2011，p.26）は，このポリアの 4 段階の問題解決過程について「1980 年代当初は，この 4 段階に沿って授業過程を構想する実践研究が多数あり，それなりの成果を収めている（例えば，東京都中央区阪本小学校，1983）」と多くの学校で実践研究が行われていたことを紹介している。阪本小学校（1983）の研究冊子を見ると，ポリア

の4段階の問題解決過程は「学生が，問題解決する時の有効なモデルである」(p. 26) としながら，「これらの全体の解決過程を通して問題解決能力が育てられていくと思い，小学校でも子どもの実態に即して学習させうる有意義な授業過程であると考えた。」（p.26）とポリアの問題解決過程の4 段階を実践している。具体的な問題解決過程として，「問題の理解」，「解決の計画と実行」，「解決の検討」としている。「計画を立てる」過程と「計画を実行する」過程を合体させて「解決の計画と実行」としている。更に，「解決の検討」の中に話し合い活動を取り入れている。こうした問題解決過程を受けて，現在の算数の教科書（清水，2014）には，子どもに分かるように，①どんな問題かな，②自分で考えよう，③みんなで話し合おう，④たしかめよう，⑤ふりかえろうなどの問題解決過程が取り上げられている。

ポリアの問題解決過程を更に詳しく見てみると下記のように詳しい問いかけが載せられている。ポリアはこの問いかけには2つの目的があるとしている。「その一つは学生が将来手近な問題を解くのを助けることであり，もう一つは学生が将来自分で解く能力を養うことである」（pp.7-8）としている。つまり，こうした問いは，最初は教師が学生（子ども）に問いかけるが，ゆくゆくは学生（子ども）本人が自分自身に問いかけるようになってほしいためである。

ポリア（1957）の『いかにして問題をとくか』の表紙裏に掲載されている問題解決過程と具体的な問いかけを以下に示す。

①. 問題を理解すること
- 未知なものは何か？
- 与えられているもの（データ）は何か？
- 条件は何か？
- 条件を分解せよ。
- 条件を満たすことはできるか？
- 問題の中に矛盾点は，余分な要素はあるか？
- できるなら図を描け。適当な記号を導入せよ。

②. 計画を立てること
- 与えられているもの（データ）と未知なものとにつながりはないか？
- 以前に同じような問題，似たような問題に出会ってないか？
- 類似の，関連のある問題を知らないか？
- 似た例題，似た結果，似た方法で使えそうなのは？
- 役立ちそうな定理や方法を知らないか？
- 与えられているもの（データ）は全部使ったか？
- 問題が解けそうにないなら似たような，せめて関係してそうな問題をさがせ。そいつはもっと一般的だったり，もっと特殊だったり，類似の問題だったりするだろう。
- 条件の一部だけ使って，残りは捨ててみよ。そうしてみて，解き方は変わるだろうか？
- ひょっとすると補助問題や補助変数が必要なのかもしれない。

③. 計画を実行すること
- 解答の計画を実行するときに，各段階を検討せよ。
- 間違ってないと証明できるか？もしできないなら計画を修正するにはどうすればいい？

④. ふりかえってみること
- 一般的な方法やアイデアが何かあったか？
- 結果をためすことができるか。議論をためすことができるか。
- 結果をちがった仕方でみちびくことができるか。それを一目のうちに捉えることができるか。
- 他に問題にその結果や方法を応用することができるか。

以上のようなポリアの問題解決過程を経験させることは，数学的な問題解決過程の習得とともに，数学的な知識技能の習得や数学的な考え方の習得や自立性の育成などの人間性の涵養を期待してのことでもある。

2.2 オープンエンドアプローチによる学習指導

オープンエンドアプローチによる学習指導は，先の文部科学省コミュニケーション教育推進会議（2011）の課題に答えるものでもある。価値多元

化社会では多様な価値観が表出し，正解が一つとは決まらないことが表出する。オープンエンドアプローチによる学習指導はこうした価値多元化社会で必要な能力の育成に答えることになる。

オープンエンドアプローチは，1971 年から算数・数学科の高次目標を評価するために開発されたものである（橋本他，2010)。また，オープンエンドアプローチの成果は『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』(島田, 1977) にまとめられ，数多くの実践事例が紹介されている。橋本他（2010，p.241）は，「この本は 20 年後の 1997 年に NCTM (米国数学教師協議会)で認められ，英訳本が Becker and Shimada（1997）によって出版されている。日本が世界に発信し，認められた数少ないアイデアの一つである」と紹介している。

島田（1977，p.9）は「普通の算数・数学科の授業で取り上げられる問題は正答か誤答のいずれかであり，正答は一つしかない。このような問題を完結した問題，クローズドな問題と名付け，これに対して正答が幾通りにも可能になるように条件づけた問題を未完結な問題，結果がオープンな問題，オープンエンドの問題と呼ぶ」としている。

島田（1977）は，数学教育に於けるオープンエンドアプローチによる学習指導のねらいを次のように規定している。

「未完結な問題を課題として，そこにある正答の多様性を積極的に利用することで授業を展望し，その過程で，既習の知識・技能・考え方を色々に組み合わせて新しいことを発見していく経験を与えようとするやり方を意味する」（pp.9-10）

島田（1977）は，オープンエンドな問題で子どもが考える数学的解法や結果の多様性を「流暢性」，「柔軟性」，「独創性」の観点から評価するとしている。「流暢性」と「柔軟性」はどれだけ多くの考えが出せるかという反応の量的な面からの評価であり，「独創性」は観点の斬新さという質的な面からの評価である。

島田（1977）のオープンエンドな問題には，「数値化の問題（How to measure)」，「分類の問題（How to classify)」，「きまり発見の問題 (How to find)」の 3 つのタイプがある。数値化の問題(How to measure）には，「ちらばりの問題」や「マラソンの順位付けの問題」が紹介されていて，「分類の問題（How to classify)」には，「立体図形の分類の問題」が，「きまり発見の問題（How to find)」には，「野球の勝敗表のきまり発見の問題」が紹介されている。「数値化の問題 (How to measure)」の「ちらばりの問題」では，散らばりを表す数値化の考えが子どもから多数表出される。例えば，a) 多角形の面積，b) 多角形の周の長さ，c) 2 点を結ぶ最大線分，d) 線分の和，e) 任意の点から各点への長さの和，f) 円などでおおうときの最小の円の半径，g) 座標の導入による平均偏差，標準偏差などによる方法である。実際の授業では，多様な数学的な視点が発表されて，それらの長所や短所が議論され，更に一般性が追求される。結果は，オープンエンドになる。分類の問題（How to classify)」の「立体図形の分類の問題」でも，多様な分類の考えが子どもから表出される。また，「きまり発見の問題（How to find)」の「野球の勝敗表のきまり発見の問題」でも野球の勝敗表を見て内在しているきまりを子どもは多数見つけることになる。どれもがオープンエンドになる。

そして，以上の問題に共通しているのは，そこで仮定していることは数量や図形など全て数学的であると言うことである（島田，2017b)。

これに対して，馬場（2009）は，社会性を取り入れたオープンエンドな問題を取り上げ，これを「社会的オープンエンドな問題」と命名している。日本において社会的オープンエンドな問題の重要性を指摘したのは飯田（1995），飯田他（1995）である。社会的オープンエンドな問題は，価値負荷的で文脈依存的な問題であり，社会的価値観に応じて数学的モデルが構成されるとしている。その問題の中の一つにメロンの問題がある。飯田（1995）の紹介によると，そのメロンの問題を用いて実際に授業をしてみると，子どもから平等性

やいたわりの情が表出し，点数に応じて比例配分する考えだけではなく， 参加した 3 チームに平等に同じ数ずつ分けようと言う考えや負けた２チームには参加賞として１個ずつあげて残りを優勝チームにあげようと言う考えなどその人の社会的価値観（個人的価値観）に応じて数学的モデルが多様に表出することを紹介している。

馬場（2009）は，飯田（1995）の考えを支持し更に理論的に研究を進めている。馬場(2009)は，オープンエンドな問題には社会的なものと数学的なものがあることを述べ，社会的オープンエンドな問題と数学的オープンエンドな問題の相違を目標,問題,方法という視点で分析している(表１)。馬場（2009，p.52）は，社会的オープンエンドな問題を「数学的考え方を用いた社会的判断力の育成を目標とした数学的・社会的多様な解を有する問題」と規定している。

島田（2015b）は馬場（2009）の研究を基にして，島田（1977）の取り上げたオープンエンドな問題は，馬場（2009）の言う数学的オープンエンドな問題であることを明らかにし，更にどのようなことを「仮定」しているかにより，社会的オープンエンドな問題になったり数学的オープンエンドな問題になったりすることを述べている。例えば,「仮定」が数学的仮定であれば数学的オープンエンドな問題になり,「仮定」が社会的価値観などの社会的仮定であれば社会的オープンエンドな問題になるということを明らかにしている。それぞれ数学的仮定や社会的仮定に基づき多様な数学的モデルが構成され，結果がオープンエンドになるのである。

こうした飯田（1995）や馬場（2009）の研究を受けて，島田・馬場（2013a，2013b，2014），Shimada and Baba (2012 ，2015，2016)，島田（2015a，2015b，2016，2017a，2017b，2017c）は，社会的オープンエンドな問題の研究に取り組み，社会的価値観に基づく数学的モデルの多様性や社会的価値観の多様性などを研究している。最近では,西村他(2014),服部(2017),神保(2018),小川・島田（2018）なども社会的オープンエンドな問題による価値観や数学的モデルの多様性の研究を行っている。

算数科の学習過程のイメージ図（図 1）との関連を考えると，社会的オープンエンドアプローチは社会事象との関連を図ることになるので左回りの問題解決過程になり,数学的見方が育成される。一方，数学的オープンエンドアプローチは，右回りの問題解決過程であり，一般化などの数学的な考え方が育成される。

2.3 数学的モデル化による学習指導

新しい学習指導要領では実世界の問題を取り上げ数学化し，学習した内容を活用して問題を解決し，解決した結果を現実で検証する活動を重視している（文部科学省,2017b)。学習過程のイメージ図（図 1）の左回りの活動である。この活動に関わるのが数学的モデル化である。具体的な学習過程として三輪（1983）による数学的モデル化過程，PISA による数学化サイクル（国立教育政策研究所，2004）や島田（2015b）による数学モデル化の研究を取り上げる。なお，島田（2015b）の研究は，長崎他（2001）の先行研究を基にしている。

表１　オープンエンドな問題の比較（馬場, 2009）

	数学的オープンエンドな問題	社会的オープンエンドな問題
目標	数学的な考え方の育成	数学的考え方を用いた社会的判断力の育成
問題	数学的多様な解を有する	数学的・社会的多様な解を有する
方法	数学的多様な解と一般化，記号化による数学の深まり	数学的・社会的多様な解と価値観に基づく議論による

① 数学的モデル化の定義

a）モデル

本稿でのモデルの意味は「問題とする事象（対象や諸関係）を模索し，類比・単純化したもの」と言う意味で用い，事象とモデルは，構造的同一性を保っていることが重要である。また，事象のどの側面をモデルに取り込むかは，解決の目的に依存していて，同じ事象であったとしても目的によって違うモデルが構成されることになる。また，モデルにはある事象を捉えやすくする，分かりやすくすると言う機能がある。

例えば，モデルの例として物理学の「落体現象のモデル」がある。斜面上の落下現象の実験は，通常の落体現象のモデルと言われるが，そこには，速度が速く，観測しにくい通常の落体現象を解明すると言う機能がある。

次の Pinker（1981）の定義は，このようなモデルの機能をよく捉えている。Pinker は，モデル（model）について次のように定義している。

> 「体系 M がある目的に関して体系 O（Original）のモデルであるというのは，M は，その目的に対して O の代用物になりうるし，また，Mの研究は，この文脈において，O に対して意味ある結果を生み出す場合である」（p.697）

ここで，「ある目的に対して」とあるのは，同じ事象に対しても，目的によって，作成されるモデルが異なってくることを意味している。このモデルの定義に基づいて，ガリレオ・ガリレイが考えた斜面の落体現象の実験を考察すると，この実験の目的は，落体現象を数理的に解明することであり，そのためにガリレオは，次のような理想化を図ったと言う（丹羽，1999）。羽毛のような軽い物体の場合，空気による抵抗が無視できなくなり，それが主要な要因になるので，落体現象の本質から離れてしまう。したがって，石や鉄のような密度の高い重い物体を扱う。落下速度があまり大きいと再び抵抗が無視できなくなるので落下速度もあまり大きくない場合を選ぶ（丹羽，1999）。

このような理想化のもとで，落体現象を数理的に解明しようとしたが，当時の技術では，通常の落体現象は観測しにくい。そこで，速度が比較的遅く観測しやすい斜面上の落下現象に置き換え観測したのである。例えば，速度が速く，当時の技術では観測しにくい通常の落体現象を，速度が比較的遅く観測しやすい斜面上の落下現象に置き換えること，また置き換えることが可能であることを保証する実験や考察を行ったうえのことである（丹羽，1999）。

上述より，置き換えることが可能であること，すなわち代用物になりうることを保証する実験や考察を行った上で斜面上の落下現象に置き換えたことが分かる。この場合，通常の落体現象を研究する目的に対して，斜面上の落下現象を調べることが代用物となり，この代用物が，通常の落体現象に対して意味のある結果を生む。このことから，斜面上の落下現象を，通常の落体現象のモデルと捉えることができる。本稿では Pinker（1981）の言うモデルの定義を基にして考えていく。

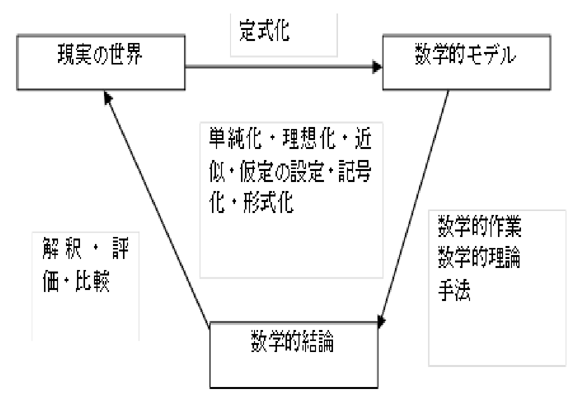
b）数学的モデル

三輪（1983）は，数学的モデルについて，次のように述べている。

> 「モデルは，対象とする事象，それを取り扱う目的と手法によって，それを表すのに，ことば，図などの視覚的手段，数や式などの数学的手段など，色々な仕方がある。数学的モデルと言うのは，数学的手段を主な表現方法としてとっているものであり，したがって，モデルの運用においては，当然の事ながら，数学的作業が伴うものである」（p.118）。

数学的モデルは，構成したモデルから，何らかの数学的手段によって，事象に関する何らかの知見を得ることを目的としているため，採用される数学的手段とモデルの数学的表現は深いかかわりがあると考えられる。

これらの見解を踏まえ，本稿では，数学的モデ



i　その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化)。
ii　定式化した問題を解く（数学的作業)。
iii　得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する(解釈，評価)。
iv　問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化)。

図 2 三輪による数学的モデル化過程（三輪，1983）

ルを「数学的モデルは，事象をある目的に従って，数学的処理が可能な，数，式，図，表，グラフなどの数学的表現を用いて表したモデル」と定義する。

例えば先述したガリレオの落体現象の実験で言えば，鉛直方向の落下距離 y が落下時間 t の 2 乗に比例することを表した $y = at^2$ と言う式が，落体現象の 1 つの数学的モデルである。また，南極大陸の面積を求めるのに，南極大陸を円で表したらその円は数学的モデルであり，更に円の面積公式で表したらその式も数学的モデルである。

c) 数学的モデル化

本稿では，数学的モデル化と数学的モデル化過程とは同じ概念であるとし，本稿では引用文献で数学的モデル化過程と言う言葉を用いている場合を除き，数学的モデル化を使用する。

数学的モデル化は，現実世界の問題を数学的に解決する際の一連の過程である。

例えば，三輪（1983）は，数学的モデル化過程を図 2 の図式に沿って定義している。三輪によれば，それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探究を要すると言う認識があると言う前提の下で，図 2 のような一連の活動を繰り返すことが数学的モデル化であると言う。

一方 PISA では，図 3 のような数学化サイクルを踏むことを重視している。この数学化サイクルを PISA では，数学的リテラシーを達成するための方法として重視している。

図 4 の島田（2017b）による数学的モデル化と図 3 の PISA の数学化サイクルとの相違は，図 4 の数学的モデル化が図の楕円の中に数学的モデル化に必要な力を示している点である。 図 4 の必要な力は，長崎他（2001）の研究を参考にしている。長崎他（2001）は，算数・数学と社会をつなげる力を表 2 のように同定した。そして，これらの力を島田（2017b）は図 4 の数学的モデル化に位置付けた。数学的モデル化に於ける定式化に関わる力としては，仮定をおく（B11)，変数を取り出す（B12）などを考え，数学的モデルを構成する時に関わる力として，変数を制御する（B13)，仮説を立てる（B14）などを考えて，数学的モデル化に位置付けた。図 4 の楕円の中にこれらの力を入れてある。

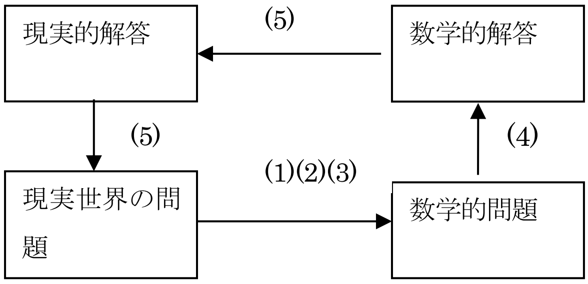
② 数学的モデル化の力の育成と授業の型

島田（1977）は,「数学的活動」を図 5 のような模式図に表している。この模式図は先の算数・数学の学習過程のイメージ図 (図 1) に似ている。図 5 の「a 現実の世界」が学習過程のイメージ図（図 1）の左回りの図に対応し,「b 数学の世界」が学習過程のイメージ図（図 1）の右回りの図に対応する。この模式図 (図 5) に従えば，数学的活動には，現実の世界と数学の世界の間でのサイクル（c → f → g → h → j → l →m→ g →・・・・）と，数学の中でのサイクル（例えば， e → g → h → i →・・・）の両面があり，この前者が数学的モデル化に当たることが分かる。そして，島田（1977）は，算数・数学科の目標達成のために，この数学的活動の全体を学習活動に含めるべきだと主張している。更に，次のように述べている。

表２　算数・数学と社会をつなげる力
（長崎他，2001）

A．社会における量・形についての感覚
　A01．長さの感覚　　A02．広さの感覚
　A03．かさの感覚　　A04．重さの感覚
　A05．角度の感覚　　A06．時間の感覚
　A07．速さの感覚　　A08．形の感覚
B．社会の問題を数学的に解決する力
　B1．社会の現象を数学の対象に変える
　B11．仮定をおく　　B12．変数を取り出す
　B13．変数を制御する　B14．仮説を立てる
　B2．対象を数学的に処理する
　B21．表・式・グラフ・図等で表現する
　B22．操作を実行する
　B3．社会に照らして検証する
　B31．予測・推測をする　　B32．修正する
C．社会において数学でコミュニケーションする力
　C01．数学的表現から現象を読み取る，伝える
　C02．数学を使った日常文を読み取る
D．近似的に扱う力
　D01．近似的に式を立てる
　D02．近似的に読み取る

「新しい事項を導入する場合，ふつう導入問題によって，新たなくふうが必要であることを認めさせ，既習の事項をもとに新概念を組み立てさせ，新理論を導く。この場合，導入問題というのが現実の世界の問題であり，条件や仮説を数学的に言い換えることから出発しているのであれば，ｆ→ｇ→……と進んでいるといえるのであるが，多くは数学的に言い換えられた段階，ｇから出発している。そして，そのあとはｇ→ｉ．新理論→ｊ．結論という過程を進むが，ｌ．現実との照合を通ることなくｎ．類例に進んでいる。このことは，ｇで考えたモデルが，実際は，疑似数学モデルであることを意味している。そして，類例を通じて，一般的なアルゴリズムの開発や理論の開発に進む。この段階の定着を図るためには，形式的な練習問題が課せられ，練



(1) 現実に位置づけられた問題から開始すること。
(2) 数学的概念に即して問題を構成し，関連する数学を特定すること。
(3) 仮説の設定，一般化，定式化等のプロセスを通じて，次第に現実を整理すること。それにより，状況の数学的特徴を高め，現実世界の問題を忠実に表現する数学の問題へと変化することができる。
(4) 数学の問題を解く。
(5) 数学的な解答を現実の状況に照らして解釈すること。これには解答に含まれる限界を明らかにすることを含む。

図３　PISA による数学化サイクル
（国立教育政策研究所，2004）

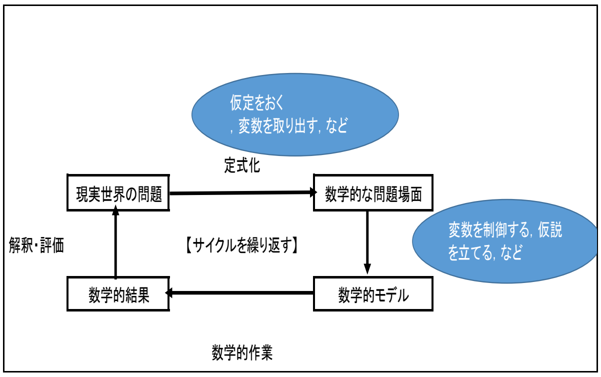


図４　島田による数学的モデル化
（島田，2017b）

習における活動は，一種の記号ゲームとなる」（島田，1977, p.19）

島田（1977）は，現実の世界から数学の世界に進む際の条件や仮説を数学的に言い換えることから出発することの重要性を指摘している。そのためには，授業を通して，図４の数学的モデル化に

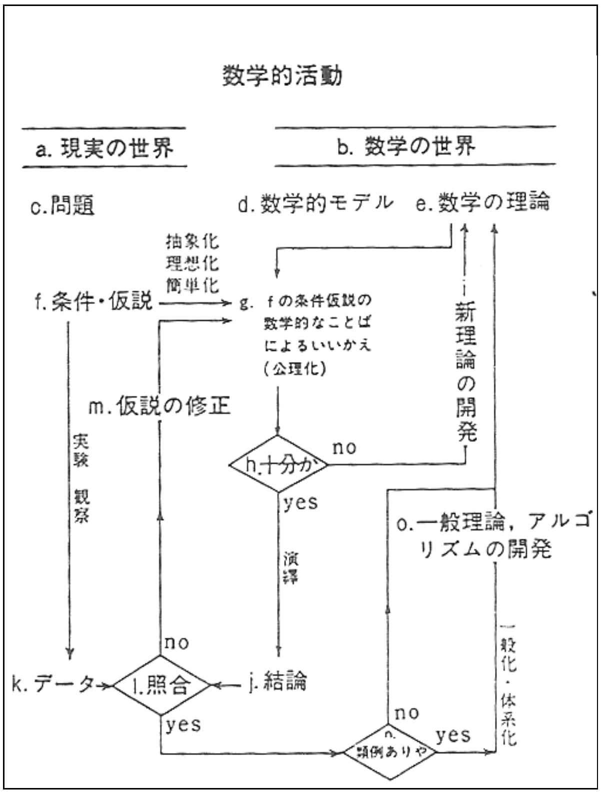


図 5 現実の世界と数学の世界（島田，1977）

おける仮定をおく力の育成を図らなければいけないと思われる。問題解決において「何を仮定すれば解決できるか」を意識することが，現実場面の問題を数学的モデルを用いて処理するためには重要になる。このように数学的モデル化の授業を行うことにより，数学的モデル化の力，とりわけ仮定をおく力を育成できることが期待できる。このような数学的モデル化の力は，数学的な見方に関わる力と言える。このような仮定をおく力の育成に焦点を当てた研究に島田・西村（2008）の研究がある。

2.4 問題設定（Problem Posing）による学習指導

「米国の NCTM（1980）の勧告“An Agenda for Action”で問題解決の重要性が提唱され，それが我が国の問題解決研究にも大きな影響を与えた」(山下，2010，p.233）と言われており，問題設定は，1980 年代問題解決研究の中で注目されてきた（山下, 2010）。その当時, ブラウン・ワルター（1990）が問題生成の方法として“What if not ストラテジー”を考案し, それが日本の算数科教育にも紹介され，盛んに研究された。また，平林（1984）は,「問題設定の持つ教育的価値に目を向けるべきである」（p.69）と述べ，我が国の問題解決研究の現状を批判的に分析し，問題設定から始まる問題解決の重要性を指摘した（山下，2010）。

What if not ストラテジーは，「もしそうでなかったら」という手法を用いて問題をつくる方法である。子ども自身に問題をつくる能力を育成するための方法と言える。こうした問題づくりの研究として代表的な研究は国立教育研究所の研究グループが中心になって考えた「問題の発展的な扱い」である。そこでの問題設定の手法は「その問題の構成要素となっている部分を，類似なものやより一般的なもの等に置き換えたりその問題の逆を考えたりすることを通して，新しい問題をつくる」（竹内・沢田，1984，p.25）のである。橋本（2001）は，こうした問題構成を通して，数学的な考え方である発展的な考え方を育成することができると述べ, 発展的な考え方とは,「観点変更」「一般化」「拡張」「逆」などの意味で用いられていることを見出した（山下，2010）。

小学校での代表的な実践校として東京世田谷区松原小学校（1984）の『算数科における問題つくり－発展的な扱いによる指導の実践－』がある。その中には，単元全体の指導計画が示され，問題つくりのポイント，数時間の学習過程，授業を行う上での指導上の留意点，評価と手立てが示されている。また，最初に与えた問題を原題といいその原題を基にしてどのように子どもたちが発展的に問題をつくったのかが紹介されている。具体的なつくり方として，以下のようなものがある。

①数値をかえて問題をつくる。
②事物をかえて問題をつくる。
③図形をかえて問題をつくる。
④類推をして問題をつくる。
⑤逆の構成にして問題をつくる
⑥複合して問題をつくる。

こうした発想には，最初に与えられた問題を基に, what if not ストラテジーが利用されている。

松原小学校（1984，p.11）の研究冊子には，「こうした問題つくりを通して,① 問題解決学習の連続性の中で，はじめの問題の定着ができる。② 数学的な考え方を自然に呼び起こせる。③ 個に応じた学習活動が望める。④ 児童同士の討議が活発になり，児童同士や自己の評価が可能になる」とまとめられている。また，発展的な問題づくりの学習指導過程として，① 原問題の解決，② 問題づくり, ③ つくった問題の発表と分類・整理, ④ つくった問題の解決, ⑤ まとめと発展が紹介されている（竹内・沢田，1984）。

こうした発展的な問題づくりの影響を受けた個人的な研究も見られる（例えば，島田，1995）。

このような問題設定による学習指導では，算数科特有の見方・考え方が育成でき，更には，問題設定に意欲的に取り組む子どもの育成に貢献できる。

3. 考察

本稿では，算数科教育に於ける学習指導論について考察した。まず，本研究科の設立の趣旨について確認し，次に学習指導とは何かを考察し，更に新学習指導要領（文部科学省，2017b）を含めたこれからの社会で必要とされる力は何かを分析し，それらを受けて，算数科教育ではどのような学習指導を構成していけばよいかを検討した。

考察の結果，本研究科では，実践研究者や教科教育学研究者に求められる力として，教科の存立基盤や教科の共通性と固有性という視点から学習指導を構想できる力であることを確認し，更に，「学習指導」とは，子どもの主体性を重んじ，その上で子どもたちがその教科の知識・技能や考え方を獲得し，人間性の育成を図るための教師の働きかけであること（吉本，1985）を抽出し，学習指導には，多様な要素を内包していること（日本教科教育学会, 2017；高田，1995）も明らかにした。次に，新学習指導要領（文部科学省，2017a）では，3つの柱の資質・能力の育成を図り，特に教科の本質に関わる見方・考え方の育成とともに問題解決能力と問題発見能力を育成しようとしていることを導出した。更には，国際化が進む社会に対応するために文部科学省コミュニケーション教育推進会議（2011）は多様な価値観や正解のない課題に対応できる力の育成も期待していることが分かった。

更に，問題解決能力と問題発見能力を育成するためには，算数科教育では，どのような学習指導を構成すればよいかを先行研究を基にして考察した。算数科の学習指導論の先行研究（日本数学教育学会，2010）を調べ，その中から問題解決能力の育成に関わる「問題解決による学習指導」，「オープンエンドアプローチによる学習指導」，「数学的モデル化による学習指導」を取り上げ，更に問題発見能力の育成に関わる「問題設定のための学習指導」を取り上げて考察した。

問題解決能力を育成するための「問題解決による学習指導」では，ポリアの問題解決過程を取り上げ，数学的な問題解決過程の習得とともに，数学的な知識，技能の習得や数学的な考え方の習得及び自立性の育成などの人間性が涵養できることを述べた。「オープンエンドアプローチによる学習指導」では，社会事象に注目する「社会的オープンエンドアプローチ」と数学的事象に注目する「数学的オープンエンドアプローチ」があり，いずれも解の多様性に注目し，数学的見方・考え方の育成が期待され，更にはこれからの社会に必要な価値観の多様性にも対応できることが分かった。「数学的モデル化による学習指導」では，日常の問題を仮定をおいて数学の問題にする力の育成が期待されていて，数学的な見方が育成されることが分かった。問題発見能力を育成するための「問題設定（Problem Posing）のための学習指導」では，発展的な考え方などの数学的な考え方が育成でき，算数科特有の見方・考え方が育成できることや問題設定に意欲的に取り組む子どもの育成に貢献できることも分かった。このような学習指導の中で価値観の多様性への対応する力も育成できる。

問題解決能力や問題発見能力はすべての教科で育成しなければならない汎用的な能力であり，その育

成を通して教科の固有性としての教科独自の見方・考え方を育成することが可能であり，本研究科の設立趣旨に合致することが分かった。また，問題解決能力や問題発見能力の育成は，それらの育成を通して吉本（1985）の考える学習指導を達成することも可能である。

私たちは，これらの算数科学習指導のねらいを明確に理解しながら子どもの能力育成や人間性の育成を図っていく必要がある。

引用・参考文献

馬場卓也（2009）「算数・数学教育における社会的オープンエンドな問題の価値論からの考察」『数学教育学研究』15(2)，pp.51-57.

Becker & Shimada Editors.(1997).“The Open-Ended Approach：A New Proposal for Teaching Mathematics.“ *National Council of Teachers of Mathematics.*

ブラウン・ステファン，I.＆ワルター・マリオン，I.（平林一栄監訳）（1990）『いかにして問題をつくるか－問題設定の技術－』東洋館，pp.41-140.

橋本吉彦・橋本由美子（2010）「オープンエンドアプローチ」日本数学教育学会編『数学教育学ハンドブック』東洋館，pp.239-244.

橋本吉貴（2001）「算数・数学科における発展的な考え方に関する考察」『日本数学教育学会誌』83(9)，pp.10-17.

服部裕一郎（2017）「中学校数学における批判的思考力を育成する授業の開発研究－批判的数学教育の視座に依拠して－」『第 5 回春期研究大会論文集』pp.209-216.

平林一栄（1984）「問題解決から問題設定へ」『第１７回日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集』pp.69-72.

飯田慎司（1995）「オープンエンドの問題解決と Humanistic Mathematics について」『第 28 回日本数学教育学会数学教育論文発表会論文集』pp.243-248.

飯田慎司・山下昭他（1995）「算数学習におけるオープンエンドの問題による価値認識に関する研究」『九州数学教育学会誌』１，pp.32-43.

飯田慎司（2010）「問題解決」日本数学教育学会編『数学教育学研究ハンドブック』東洋館，pp.221-232.

池田敏和（2010）「数学的モデル化」日本数学教育学会編『数学教育学ハンドブック』東洋館，pp.272-281.

神保勇児（2018）「小学校低学年における社会的価値観表出についての考察」全国数学教育学会第 47 回大会発表資料.

国立教育政策研究所監訳（2004）『PISA2003 年調査評価の枠組み』ぎょうせい，p.29，p.38.

三輪辰郎（1983）「数学的モデル化についての一考察」『筑波数学教育研究』2，pp.117-125.

文部科学省コミュニケーション教育推進会議録（2011）.www.mext.go.jp/bmenu/houdou/23/08/（2018 年 2 月 28 日最終閲覧））.

文部科学省（2017a）『小学校学習指導要領解説総則』.(pp.4-38） www.mext.go.jp（2018 年 2 月 28 日最終閲覧）.

文部科学省（2017b）『小学校学習指導要領解説算数編』日本文教出版，p.8，p.72.

文部省（1947）『学習指導要領一般編試案』，www.nier.go.jp/guideline（2018 年 2 月 28 日最終閲覧）.

長崎栄三他（2001）『児童・生徒の算数・数学と社会をつなげる力に関する発達的研究【改訂版】』. 文部科学研究費補助金（基盤研究 A），高等学校の科学教育改革に関する総合的研究，課題番号 11308006，平成 11 年度～14 年度研究報告書第 2 集改訂版，p.16.

中原忠男（1995）『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文社，pp.83-84.

奈須正裕（2017）『コンピテンシー・ベイスの授業づくりのガイドブック』明治図書，pp.8-13.

日本教科教育学会編（2017）『教科教育研究ハンドブック－今日から役立つ研究手引き－』文溪堂，p.99.

日本数学教育学会（2010）『数学教育学研究ハンド

ブック』東洋館，pp.221-244，pp.272-281.

日本体育大学大学院教育学研究科（2017)『設置の趣旨等を記載した書類』p.3.

西村圭一他（2014)「数理科学的意思決定力を育む数学教育の展望」『第 2 回春期研究大会論文集』pp.61-64.

丹羽敏夫（1999）『数学は世界を解明できるか（第 7 版)』中公新書，pp.9-30.

小川功介・島田功（2018)「道徳教育との関連を意識した算数科の授業づくりに関する実践研究－平等・公平に着目した道徳教材「どう分けるのがよいか」を解決することを通して－」全国数学教育学会第 48 回大会発表資料.

Pinker, A.(1981). The concept ‘model’ and its potential role in mathematics education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Taylor Francis OnLine,12(6), pp.693-707.

ポリア（柿内賢信訳）（1957)『いかにして問題を解くか 第 9 版』丸善，pp.9-20，表紙裏のページ.

島田功（1995)「発展的な考え方が伸びる授業－カレンダーの問題－」『算数の基礎学力をどうとらえるか』東洋館，pp.149-158.

島田功・西村圭一（2008)「仮定をおく力の育成をめざす授業に関する研究－算数と社会をつなげる力の育成をめざして－」『日本数学教育学会誌』90(10)，pp.10-18.

島田功・馬場卓也（2013a)「算数教育における社会的オープンエンドな問題による価値観指導に関する研究(1)－社会的価値観とそれが表出する問題について－」『数学教育学研究』19(1), pp.81-88.

島田功・馬場卓也（2013b)「算数教育における社会的価値観の育成に関する研究(2)－先行研究の批判的検討による基礎的枠組みの考察－」.『数学教育学論究臨時増刊』95，臨時増刊，pp.177-184.

島田功・馬場卓也（2014)「算数教育における社会的価値観の育成に関する研究(3)－先行研究の批判的検討によるオープンエンドな問題の特性の考察－」『数学教育学論究臨時増刊』96，臨時増刊，pp.73-80.

島田功（2015a)「社会的オープンエンドな問題を用いた問題解決学習で表出する日本の小学生の社会的価値観と数学的モデルの特性の研究」『第 3 回春期研究大会論文集』pp.109-116.

島田功（2015b)『算数・数学教育における多様な価値観に取り組む力の育成に関する研究－社会的オープンエンドな問題を通して－』広島大学学位論文（未公刊)，pp.1-184.

島田功（2016)「社会的オープンエンドな問題を通した批判的思考力育成の可能性」『第 4 回春期研究大会論文集』pp.113-120.

島田功（2017a)「社会的オープンエンドな問題を通した批判的思考力育成の可能性－小学生の社会的価値観と数学的モデルの批判的思考力の様相－」『第 5 回春期研究大会論文集』pp.217-224.

島田功（2017b)『算数・数学教育と多様な価値観－社会的オープンエンドな問題による取組み－』東洋館，pp.1-254.

島田功（2017c)『社会的価値観の重視と算数の力の育成に関する理論的実証的研究』科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金)（基盤研究C）.課題番号 26381231.研究成果報告書（平成 26 年度～28 年度）.

Shimada, I. & Baba, T. (2012). Emergence of Students’ values in the Process of solving the socially open-ended problem, *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 4, pp.75-82.

Shimada, I. & Baba, T.（2015）. Transformation of Student’ Values in the Process of solving socially open-ended problems , *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp.161-168.

Shimada, I. & Baba, T.（2016）. Transformation of Student' Values in the Process of solving socially open-ended problems(2) , *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp.187-194.

島田茂編著（1977）『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』みずうみ書房，pp.9-218.

清水静海編（2014）『わくわく算数 3 上』新興出版社啓林館，pp.4-5.

高田喜久司（1995）『学習指導の理論と実践』樹村房，pp.1-113.

竹内芳男・沢田利夫編著（1984）『問題から問題へ－問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善』東洋館，pp.25-27.

東京都世田谷区立松原小学校（1984）『算数科における問題つくり－発展的な扱いによる指導の実践－』東洋館，pp.3-182.

東京都中央区立阪本小学校（1983）『算数科問題解決能力の育成』明治図書，p.26.

山田篤史（2011）「数学的問題解決過程のモデルについて－問題解決的な授業のデザインに向けた予備的考察－」愛知教育大学イプシロン，53，pp.25-38.

山下昭（2010）「問題設定」日本数学教育学会編『数学教育学研究ハンドブック』東洋館，pp.233-238.

吉本均（1985）「学習指導」『日本大百科全書 5』小学館，pp.31-32.